Les ensembles

un **ensemble** est une collection bien définie d'objets, appelés **éléments**. Les ensembles constituent une notion fondamentale en mathématiques, utilisée pour définir et étudier d'autres concepts.

1. Ecriture d'un ensemble

Un ensemble est souvent noté par une lettre majuscule, comme A, B, C, D..., E, F...

L'écriture d'un ensemble peut se faire de deux manières principales : par **extension** et par **compréhension**. Ces deux méthodes permettent de définir précisément les éléments qui appartiennent à un ensemble donné.

Un ensemble défini en extension

- Lorsque les éléments de l'ensemble sont listés entre accolades,

Par exemple: $A=\{8, 5, 3, 6\}$. On dit que 8, 5, 3 et 6 sont les éléments de A.

- L'ensemble A est défini en **extension.**
- L'ordre des éléments ne change pas l'ensemble.

Par exemple $\{1, 7, 3, 6\}$, $\{1, 6, 3, 7\}$et $\{7, 1, 3, 6\}$ représentent le même ensemble.

- Dans l'écriture d'un ensemble en extension, un élément ne peut pas être écrit plus qu'une fois.
- Si un élément x appartient à un ensemble A, on écrit $x \in A$.
- Si x n'appartient pas à A, on écrit $x \notin A$.

Un ensemble défini en compréhension

- Un ensemble A peut aussi être défini par une propriété (p) commune à ses éléments.

Par exemple : $A = \{x \in \mathrm{N} \ / \ x \text{ est un nombre pair}\}$.

Cela signifie que A est l'ensemble des nombres naturels pairs.

Cet ensemble s'écrit en extension

$A = \{0, 2 , 4, 6...\}$.

2. Ensembles de Nombres

Au fil de l'histoire, les mathématiciens ont découvert une infinité de nombres, chacun avec ses particularités. Pour mieux les comprendre et les étudier, ils ont eu l'idée de les regrouper en grandes familles.

a) Les nombres entiers naturels

- Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ (de l'italien *naturale*).

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$.

- L'ensemble $\mathbb{N}$ privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3,...\}$.

Exemples :

1) $5 \in \mathbb{N}$
2) $4,2 \notin \mathbb{N}$
3) $\frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$
4) $-6 \notin \mathbb{N}$

b) Les nombres entiers relatifs

- Un nombre entier relatif est un nombre entier positif ou négatif (ou nul). L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ (de l'allemand *zahlen* qui signifie compter).

$\mathbb{Z} = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$.

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ privé de zéro est noté $\mathbb{Z}^*$.

$\mathbb{Z}^* = \{...-3, -2, -1, 1, 2, 3,...\}$.

Remarque : Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemples :

1) - 8 est un entier relatif.

   $-8 \in \mathbb{Z}$

2) 9 est un entier relatif.

$9 \in \mathbb{Z}$

3) 9,4 n'est pas un entier relatif.

$9{,}4 \notin \mathbb{Z}$

4) $\frac{7}{5}$ n'est pas un entier relatif.

$\frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$

5) π n'est pas un entier relatif.

$\pi \notin \mathbb{Z}$

6) $\frac{-3}{5}$ n'est pas un entier relatif.

$\frac{-3}{5} \notin \mathbb{Z}$

c) Les nombres décimaux

- Un nombre décimal *d* est un nombre qui peut s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

- Il s'écrit également sous la forme d'une fraction décimale.

$\frac{a}{10^n}$ (avec a $\in \mathbb{Z}$ et n $\in \mathbb{N}$)

- L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$ (du français *décimale*).

- L'ensemble $\mathbb{D}$ privé de zéro est noté $\mathbb{D}$*.

<u>Exemples</u> :

1) $0{,}56 \in \mathbb{D}$

2) $8 \in \mathbb{D}$

3) $\frac{-3}{2} \in \mathbb{D}$ ($\frac{-3}{2} = -1{,}5$)

4) $\pi \notin \mathbb{D}$ (π = 3,14159265358…)
π a une **infinité** de chiffres après la virgule, alors il n'est pas décimal

5) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ ($\frac{1}{3}$= 0,33333…...)

d) Les nombres rationnels

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$.

- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ (de l'italien *quotienté*)

$$\mathbb{Q} = \{x \,/\, x = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \}.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ privé de zéro est noté $\mathbb{Q}^*$.

- Tout nombre décimal illimité périodique s'écrit sous la forme d'une fraction. Il est donc un rationnel

<u>Exemples</u> :

1) $-\frac{3}{2}$ est un nombre rationnel
   $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

2) $0,15 \in \mathbb{Q}$

3) 1,333… est un nombre rationnel.
   $1,333\ldots = 1,\overline{3} = 1 + \frac{3}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$

e) Les nombres réels

- Un nombre réel est un nombre qui peut s'écrire avec une partie entière et un nombre fini ou infini de décimales.

- L'ensemble des **nombres réels**, représenté par le symbole $\mathbb{R}$, regroupe tous les nombres positifs et négatifs, les décimaux, les rationnels et les irrationnels, incluant le nombre 0. Ces nombres peuvent s'écrire à l'aide d'un développement décimal fini ou infini.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ privé de zéro est noté $\mathbb{R}^*$.

<u>Exemples</u> :

1) $0,47 \in \mathbb{R}$

2) $-9 \in \mathbb{R}$

3) $\Pi \in \mathbb{R}$

4) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

5) $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

6) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Remarques :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$