

Ensembles de Nombres

Au fil de l'histoire, les mathématiciens ont découvert une infinité de nombres, chacun avec ses particularités. Pour mieux les comprendre et les étudier, ils ont eu l'idée de les regrouper en grandes familles.

Les nombres entiers naturels

→ Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ (de l'italien *naturale*).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

→ L'ensemble $\mathbb{N}$ privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Exemples :

- 1) $5 \in \mathbb{N}$
- 2) $4,2 \notin \mathbb{N}$
- 3) $\frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$
- 4) $-6 \notin \mathbb{N}$

Les nombres entiers relatifs

→ Un nombre entier relatif est un nombre entier positif ou négatif (ou nul). L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ (de l'allemand *zahlen* qui signifie compter).

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

→ L'ensemble $\mathbb{Z}$ privé de zéro est noté $\mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Remarque : Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemples :

- 1) - 8 est un entier relatif.
 $-8 \in \mathbb{Z}$
- 2) 9 est un entier relatif.

$$9 \in \mathbb{Z}$$

3) 9,4 n'est pas un entier relatif.

$$9,4 \notin \mathbb{Z}$$

4) $\frac{7}{5}$ n'est pas un entier relatif.

$$\frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$$

5) π n'est pas un entier relatif.

$$\pi \notin \mathbb{Z}$$

6) $\frac{-3}{7}$ n'est pas un entier relatif.

$$\frac{-3}{7} \notin \mathbb{Z}$$

Les nombres décimaux

- L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$ (du français *décimale*).
- Un nombre décimal d est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre **fini** de chiffres après la virgule.
- Il s'écrit également sous la forme d'une fraction décimale.

$$\frac{a}{10^n} \text{ (avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N})$$

- L'ensemble $\mathbb{D}$ privé de zéro est noté $\mathbb{D}^*$.

Exemples :

1) $0,56 \in \mathbb{D}$

2) $8 \in \mathbb{D}$

3) $\frac{-3}{2} \in \mathbb{D}$ car $(\frac{-3}{2} = -1,5)$

4) $\pi \notin \mathbb{D}$ car $(\pi = 3,14159265358\dots)$

π a une **infinité** de chiffres après la virgule, alors il n'est pas décimal.

5) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ ($\frac{1}{3} = 0,33333\dots$)

a une **infinité** de chiffres après la virgule, alors il n'est pas décimal

Les nombres rationnels

- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ (de l'italien *quotienté*)
- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \{x / x = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \}.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ privé de zéro est noté $\mathbb{Q}^*$.
- Tout nombre décimal **illimité périodique** s'écrit sous la forme d'une fraction. Il est donc un rationnel

Exemples :

- 1) $\frac{-3}{2}$ est un nombre rationnel

$$\frac{-3}{2} \in \mathbb{Q}$$

- 2) $0,15 \in \mathbb{Q}$

- 3) $1,333\dots$ est un nombre rationnel.

$$1,333\dots = 1, \overline{3} = 1 + \frac{3}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$$

- 4) π n'est pas un nombre rationnel, car $\pi = 3,14159265358\dots$

c'est un nombre non répétitif et sans fin.

$$\pi \notin \mathbb{Q}$$

- 5) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, car $\sqrt{2} = 1,4142135623\dots$

c'est un nombre non répétitif et sans fin.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Les nombres réels

- Un nombre réel est un nombre qui peut s'écrire avec une partie entière et un nombre fini ou infini de décimales.
- L'ensemble des **nombres réels**, représenté par le symbole $\mathbb{R}$, regroupe tous les nombres positifs et négatifs, les décimaux, les rationnels et les irrationnels, incluant le nombre 0. Ces nombres peuvent s'écrire à l'aide d'un développement décimal **fini** ou **infini**.

→ L'ensemble $\mathbb{R}$ privé de zéro est noté $\mathbb{R}^*$.

Exemples :

1) $0,47 \in \mathbb{R}$

2) $-9 \in \mathbb{R}$

3) $\pi \in \mathbb{R}$

4) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

5) $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

6) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Remarques :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$